11. Cónicas proyectivas

Recordemos que una de las razones para construir el espacio proyectivo fue estudiar qué les pasa a los objetos afines cuando "nos vamos al infinito". Por ejemplo, en los ejercicios 2(b), 2(c) y 3 de la hojas de ejercicios de Geometría Proyectiva definimos el *completado proyectivo* de una cónica, que para las cónicas de ecuaciones $y - x^2 = 0$ y $xy - 1 = 0$ (que son las que aparecen en 2(b) y 2(c)) son los conjuntos de puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen las ecuaciones $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ y $x_1x_2 - x_0^2 = 0$ respectivamente (recuerda que para ello identificamos el plano afín (con de coordenadas x, y) con el conjunto de los puntos del plano proyectivo (de coordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2)$) con $x_0 \neq 0$, identificando (x, y) con $(1 : x : y)$ y $(x_0 : x_1 : x_2)$ con $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$). Es fácil darse cuenta de que este proceso (obtener el completado proyectivo) lo podemos hacer para cualquier cónica afín y que, dado que siempre partimos de una ecuación de grado 2, al hacer el completado proyectivo obtendremos una ecuación *homogénea* de grado 2, en tres variables. Por otra parte, vemos que, si queremos definir un conjunto de puntos del plano proyectivo como conjunto de ceros de un polinomio, tal noción solo tiene sentido si el polinomio es homogéneo (en realidad, en general no tiene sentido hablar del valor de un polinomio homogéneo en un punto del plano proyectivo (o del espacio proyectivo, si el polinomio tiene más variables), pero sí tiene sentido si dicho valor es 0).

Definición de cónica proyectiva.

El párrafo anterior motiva que defininamos una *cónica proyectiva* como el lugar de ceros de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de un polinomio homogéneo de grado 2, en las variables x_0, x_1, x_2. Tal como nos ocurrió con las cónicas afines y por las mismas razones que entonces, esta definición no resulta del todo conveniente, como indica el siguiente ejemplo (compárese con el ejemplo 10.10):

Ejemplo 11.1. El lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ o del polinomio $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2$ es el conjunto vacío. El lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x_1^2 + x_2^2$ es el conjunto $\{(1 : 0 : 0)\}$ Por otra parte, los lugares de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ de los polinomios $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ y $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2$ son distintos.

Observación 11.2. El ejemplo 11.1 nos muestra que:

(1) existen polinomios homogéneos de grado 2 con coeficientes reales cuyo lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es un conjunto finito de puntos, posiblememte vacío;
(2) existen polinomios homogéneos de grado 2 con coeficientes reales, que a pesar de tener el mismo lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, tienen distinto lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

El ejemplo 11.1 y la observación 11.2 sugieren que debemos adoptar una definición de cónica proyectiva análoga a la que adoptamos en el caso afín:

Definición 11.3. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de polinomios homogéneos de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$: dos polinomios F_1 y F_2 son equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$. Una *cónica (proyectiva)* de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es una clase de equivalencia de polinomios homogéneos de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$. Si F un polinomio homogéneo de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$, diremos que la cónica $C = [F]$ tiene ecuación $F = 0$ y que el lugar de ceros de C es el conjunto $\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

Proposición 11.4. *El conjunto de cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tiene estructura de espacio proyectivo sobre $\mathbf{k}$, de dimensión 5.*

Demostración. Ejercicio. □

Observación 11.5. En la definición 11.3 está implícito que estamos fijando unas coordenadas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, las coordenadas en el sistema de referencia proyectivo canónico; veremos más adelante qué ocurre cuando cambiamos de coordenadas. Por otra parte, es claro que si F_1 y F_2 son dos polinomios relacionados, su lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es el mismo. En ocasiones, el lugar de ceros de una cónica $C = [F]$ caracteriza dicha cónica (es decir si F' tiene el mismo lugar de ceros que F, entonces F' y F están relacionados y por tanto $[F] = [F']$). En esos casos podremos identificar, abusando de la notación, la cónica $C = [F]$ con su lugar de ceros.

Matriz asociada a una cónica proyectiva

ATENCIÓN: A partir de ahora los cuerpos con los que trabajaremos tendrán característica distinta de 2.

De forma similar al caso afín, definimos la matriz asociada a una cónica proyectiva:

Definición 11.6. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica distinta de 2, sea C una cónica proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, de ecuación

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0, \tag{11.6.1}$$

(donde $a_{ij} \in \mathbf{k}$). La ecuación (11.6.1) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} M(C) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \frac{a_{02}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{02}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Decimos que $M(C)$ es una matriz asociada a la cónica C.

Observación 11.7. La matriz $M(C)$ de la definición anterior es una matriz *simétrica.* Dada una cónica proyectiva C, su matriz asociada es única salvo producto por un elemento de $\mathbf{k}^*$.

Equivalencia proyectiva de cónicas.

De forma análoga al caso afín y afín euclídeo, parece razonable decir que dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son *proyectivamente equivalentes* si y solo si se puede pasar de una a la otra mediante una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (ya que las proyectividades son las aplicaciones que conservan las propiedades geométricas de los puntos y conjuntos de puntos del plano proyectivo: conservan las dimensiones, llevan puntos alineados a puntos alineados, conservan la razón doble...). Para ello, como en el caso afín y afín euclídeo necesitamos definir también de manera precisa qué es la imagen de una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ por una proyectividad:

Definición 11.8. Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Sean

$$\begin{array}{rcl} x_0' & = & \alpha_{00}x_0 \quad +\alpha_{01}x_1 \quad +\alpha_{02}x_2 \\ x_1' & = & \alpha_{10}x_0 \quad +\alpha_{11}x_1 \quad +\alpha_{12}x_2 \\ x_2' & = & \alpha_{20}x_0 \quad +\alpha_{21}x_1 \quad +\alpha_{22}x_2 \end{array}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia proyectivo canónico) de la proyectividad *inversa* de f (recuerda que lo que se tiene que cumplir para que f sea una proyectividad es que $\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ sea una matriz invertible). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos como $f(C)$ a la cónica proyectiva de ecuación $F(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) = 0$.

Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuaciones $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$. Decimos que C_1 y C_2 son *proyectivamente equivalentes* si y solo si existe una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $C_2 = f(C_1)$.

Proposición 11.9. *Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. El lugar de ceros de $f(C)$ es la imagen por f de el lugar de ceros de C.*

Demostración. Ejercicio. □

Igual que en el caso afín y afín euclídeo, es fácil reescribir el concepto de equivalencia proyectiva en términos de matrices asociadas a una cónica:

Proposición 11.10. *Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo con característica distinta de 2, sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea N una matriz asociada, respecto de la referencia proyectiva canónica, de la* inversa *de f. Si $M(C)$ es una matriz asociada de C entonces $M(f(C)) = N^t \cdot M(C) \cdot N$ es una matriz asociada de $f(C)$.*

Observación 11.11. Como $M(C)$ no es la matriz nula y N es invertible, es claro que $M(f(C))$ tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{00}x_0+\alpha_{01}x_1+\alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2)$ no es el polinomio idénticamente nulo. Es claro también que es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables x_0, x_1, x_2.

Teorema 11.12. *Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo con característica distinta de 2, sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $M(C_1)$ y $M(C_2)$ matrices asociadas de C_1 y C_2. Entonces, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ y una matriz N invertible tal que*

$$M(C_2) = \lambda N^t M(C_1) N.$$

Es decir, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalente si existe una matriz asociada a C_1 que es congruente *a una matriz asociada a C_2.*

Ejercicio 11.13. Demuestra que, en efecto, la equivalencia proyectiva de cónicas es una relación de equivalencia

Ecuación de una cónica después de un cambio de coordenadas.

Vemos cómo cambian la ecuación y la matriz de una cónica proyectiva cuando cambiamos las coordenadas homogéneas que estemos usando:

Definición 11.14. Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y con matriz asociada $M(C)$, sea $\mathscr{R}'$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sean

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & \alpha_{00}x'_0 \ +\alpha_{01}x'_1 \ +\alpha_{02}x'_2 \\ x_1 & = & \alpha_{10}x'_0 \ +\alpha_{11}x'_1 \ +\alpha_{12}x'_2 \\ x_2 & = & \alpha_{20}x'_0 \ +\alpha_{21}x'_1 \ +\alpha_{22}x'_2 \end{array}$$

unas ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia proyectiva canónica $\mathscr{R}_c$ y sea

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz de cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a $\mathscr{R}_c$. Diremos que $F(\alpha_{00}x'_0+\alpha_{01}x'_1+\alpha_{02}x'_2, \alpha_{10}x'_0+\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2, \alpha_{20}x'_0+\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2) = 0$ es la *ecuación de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* y que

$$M_{\mathscr{R}'}(C) = N^t M(C) N$$

es una *matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$*.

Observación 11.15. Como $M(C)$ no es la matriz nula y N es invertible, es claro que $M_{\mathscr{R}'}(C)$ tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{00}x'_0+\alpha_{01}x'_1+\alpha_{02}x'_2, \alpha_{10}x'_0+\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2, \alpha_{20}x'_0+\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2)$ no es el polinomio idénticamente nulo. Es claro también que es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables x'_0, x'_1, x'_2.

Observación 11.16. Según la definición 11.14, $F = 0$ es la ecuación de C respecto de la referencia proyectiva canónica y $M(C)$ es una matriz de C respecto de la referencia proyectiva canónica.

Proposición 11.17. *Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos sistemas de referencia proyectivos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces, para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_1}(C)$ de C respecto de la referencia $\mathscr{R}_1$ se tiene*

$$M_{\mathscr{R}_2}(C) = M^t_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1} M_{\mathscr{R}_1}(C) M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Al igual que en el caso afín, unas ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & \alpha_{00}x'_0 \; +\alpha_{01}x'_1 \; +\alpha_{02}x'_2 \\ x_1 & = & \alpha_{10}x'_0 \; +\alpha_{11}x'_1 \; +\alpha_{12}x'_2 \\ x_2 & = & \alpha_{20}x'_0 \; +\alpha_{21}x'_1 \; +\alpha_{22}x'_2 \end{array}$$

para las que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible con coeficientes en $\mathbf{k}$, pueden ser interpretadas de dos formas: bien como las ecuaciones de una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, bien como las ecuaciones de un cambio de referencia proyectiva. Esto justifica la siguiente proposición:

Proposición 11.18. *Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existen dos referencias proyectivas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ tales que la ecuación de C_1 respecto de $\mathscr{R}_1$ es la misma que la ecuación de C_2 respecto de $\mathscr{R}_2$ salvo, quizás, producto por un escalar no nulo de $\mathbf{k}$.*

De igual forma, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existen dos referencias proyectivas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ tales que $M_{\mathscr{R}_1}(C_1) = M_{\mathscr{R}_2}(C_2)$ para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_1}(C_1)$ de C_1 respecto de la referencia $\mathscr{R}_1$ y para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_2}(C_2)$ de C_2 respecto de la referencia $\mathscr{R}_2$.

Clasificación de las cónicas proyectivas reales y complejas.

Para $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, estamos listos para afrontar el problema de la *clasificación proyectiva* de las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, usando el teorema 11.12 y resultados de Álgebra Lineal sobre congruencia de matrices. Damos primero este criterio:

Proposición 11.19. *Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea $M(C_1)$ una matriz asociada a C_1 y sea $M(C_2)$ una matriz asociada a C_2.*

(1) *Si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango.*
(2) *Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango y el valor absoluto $\Sigma(C_1) = \Sigma(M(C_1))$ de la diferencia entre el número de entradas positivas y el número de entradas negativas de una matriz diagonal congruente con $M(C_1)$ es la misma que el valor absoluto $\Sigma(C_2) = \Sigma(M(C_2))$ de la diferencia entre el número de entradas positivas y el número de entradas negativas de una matriz diagonal congruente con $M(C_2)$.*

Demostración. La proposición se sigue del teorema 11.12, que nos dice que C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ son congruentes salvo producto por un escalar no nulo. Es un resultado conocido de Álgebra Lineal que una matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal y que dos matrices diagonales de rangos distintos no son congruentes. En el caso complejo, una matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal con ceros y unos en la diagonal y esto demuestra (1). En el caso real, una matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal con ceros, unos y menos unos en la diagonal. Además dos matrices diagonales con ceros, unos y menos unos en la diagonal son congruentes si y solo si tienen el mismo número de ceros, unos y menos unos en la diagonal. Esto demuestra (2). $\square$

Describimos ahora las clases de equivalencia proyectiva de cónicas y aprovechamos para explicar de forma más detallada la demostración de la proposición 11.19. Empezamos con el caso complejo, que es más sencillo.

Teorema 11.20. *Si C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, entonces C es proyectivamente equivalente a una y solo una de las cónicas proyectivas cuyas ecuaciones aparecen en la siguiente lista:*

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y decimos que C es una cónica* no degenerada.
(2) $x_0^2 + x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y C es un* par de rectas.
(3) $x_0^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 1 *y C es una* recta doble.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C. Como ya hemos dicho M es congruente a una matriz diagonal con unos y ceros en la diagonal. Esto quiere decir que, en un sistema de referencia proyectivo adecuado o, equivalentemente, después de transformarla con una proyectividad adecuada, C tiene ecuación $\lambda_0 {x'_0}^2 + \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 = 0$, donde los λ_i son unos o ceros. Si es necesario cambiando el orden de los tres primeros puntos de la referencia proyectiva podemos suponer que los primeros λ_i son unos. Si el rango de M es 3, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ porque al ser $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ una matriz congruente con M, ha de tener rango 3. Por tanto la ecuación de C en una referencia adecuada es ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$.

Si el rango de M es 2, entonces $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. La ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$.

Por último, si el rango de M es 1, entonces $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La ecuación de C respecto de la nueva referencia queda ${x'_0}^2 = 0$.

Finalmente, es claro que las cónicas de ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 = 0$ no son proyectivamente equivalentes entre sí, ya que ninguna de las matrices asociadas a una de ellas es congruente a ninguna de las matrices asociadas a otra de ellas, al tener rangos distintos. □

Teorema 11.21. *Si C es una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, entonces C es proyectivamente equivalente a una y solo una de las cónicas proyectivas cuyas ecuaciones aparecen en la siguiente lista:*

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y* $\Sigma(M(C)) = 3$ *y decimos que C es una cónica* no degenerada imaginaria *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es vacío).*

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y signatura $\Sigma(M(C)) = 1$ y decimos que C es una cónica* no degenerada real *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ no es vacío; de hecho, es un conjunto infinito).*

(3) $x_0^2 + x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y signatura* $\Sigma(M(C)) = 2$ *y C es un* par de rectas imaginarias *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es un punto, el punto de intersección de las dos rectas imaginarias, que tienen ecuaciones conjungadas).*

(4) $x_0^2 - x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y* $\Sigma(M(C)) = 0$ *y C es un* par de rectas reales.

(5) $x_0^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 1 *y C es una* recta doble.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C. Recuerda que M es congruente con una matriz diagonal con unos, menos unos y ceros en la diagonal. Argumentando como en la demostración del teorema 11.20 podemos afirmar que, en un sistema de referencia proyectivo adecuado o, equivalentemente, después de transformarla con una proyectividad adecuada, C tiene ecuación $\lambda_0 {x'_0}^2 + \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 = 0$ con los λ_i unos, menos unos o ceros. Permutando los tres primeros puntos de la referencia proyectiva y multiplicando la ecuación por -1 si fuera necesario, podemos suponer que los primeros λ_i son unos, los siguientes λ_i (si los hubiere) son menos unos, y los últimos λ_i (si los hubiere) son ceros. Siguiendo con los argumentos de la demostración del teorema 11.20, si el rango de M es 3, entonces $\Sigma(M(C))$ es, o bien 3, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, o bien 1, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. En el primer caso, la ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$ y, en el segundo caso, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$.

Si el rango de M es 2, entonces $\lambda_2 = 0$ y, o bien $\Sigma(M(C)) = 2$, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, o bien $\Sigma(M(C)) = 0$, en cuyo caso $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = -1$. En el primer caso, la ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$, y en el segundo caso queda ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$.

Por último, si el rango de M es 1, entonces $\Sigma(M(C)) = 1$, $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 = 0$.

Por otra parte, es claro que las cónicas de ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$, ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 = 0$ no son cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ proyectivamente equivalentes entre sí. En efecto, si consideramos una matriz asociada a una de esas cónicas y una matriz asociada a otra de ellas, dichas matrices no son congruentes ya que tienen distintos rangos y el número de ceros, unos y menos unos de sus diagonales es distinto. Finalmente las afirmaciones entre paréntesis se demuestran usando las ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$, teniendo en cuenta que la ecuación original de C se obtiene a partir de ellas mediante un cambio de coordenadas homogéneas *real.* □

Recta tangente, polaridad y cónica dual de una cónica no degenerada.

Proposición 11.22. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (es decir, tal que el rango de una matriz asociada suya $M(C)$ sea 3) con lugar de ceros que, con un abuso de notación llamaremos también C, no vacío, y sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ un punto de C. Sea $\Omega(p)$ el haz de rectas que pasa por p. Entonces todas las rectas de $\Omega(p)$ excepto una, que llamaremos T_pC, cortan a C en p y en otro punto distinto de p. La recta T_pC tiene ecuación*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M(C) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Demostración. Como ejercicio o consultando la proposición 4.2 de los “Apuntes de Geometría Proyectiva” de E. Arrondo. □

Corolario 11.23. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

(1) *La intersección de una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con el lugar de ceros de C es vacía, está formada por un solo punto o está formada por dos puntos distintos.*
(2) *En particular, el lugar de ceros de C no contiene tres puntos alineados y, por tanto, no contiene rectas.*
(3) *Si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, la intersección de cualquier recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ con el lugar de ceros de C es no vacía.*

Demostración. Las afirmaciones (1) y (2) son consecuencia directa de la proposición 11.22. La afirmación (3) es cierta de hecho para cualquier cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, incluso si se trata de una cónica degenerada. Recuerda que, según el teorema 11.20, una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ es proyectivamente equivalente a la cónica de ecuación

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 \tag{11.23.1}$$

con los λ_i unos o ceros. Consideramos una recta l que pasa por dos puntos distintos $(a_0 : a_1 : a_2)$ y $(b_0 : b_1 : b_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& a_0t_0 + b_0t_1 \\ x_1 &=& a_1t_0 + b_1t_1 \\ x_2 &=& a_2t_0 + b_2t_1 \end{array} \tag{11.23.2}$$

es una parametrización de l. Sustituyendo (11.23.2) en (11.23.1) obtenemos una ecuación

$$A_{00}t_0^2 + A_{01}t_0t_1 + A_{11}t_1^2 = 0, \tag{11.23.3}$$

donde $A_{00}, A_{01}, A_{11} \in \mathbf{C}$. La ecuación (11.23.3) puede ser identicamente nula, en cuyo caso l está contenida en el lugar de ceros de C o no. En este segundo caso, si $(0 : 1)$ es solución de (11.23.3), ya tenemos un punto en la intersección de l con el lugar de ceros de C, el punto $(b_0 : b_1 : b_2)$. Si $(0 : 1)$ no es solución de (11.23.3) tenemos que $A_{11} \neq 0$. Entonces, consideramos la ecuación de segundo grado

$$A_{11}t^2 + A_{01}t + A_{00} = 0,$$

que en $\mathbf{C}$ siempre tiene solución y tomamos una raíz $\mu \in \mathbf{C}$ de la misma. En ese caso $(1:\mu)$ es solución de (11.23.3) y el punto $(a_0+\mu b_0 : a_1+\mu b_1 : a_2+\mu b_2)$ es un punto de la intersección de l con el lugar de ceros de C. □

Fijémonos ahora en una cónica no degenerada real S de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, por ejemplo, en la cónica de ecuación $x^2+y^2-1=0$, llamemos también S a su lugar de ceros y sea p un punto de S, por ejemplo, el punto $(0,1)$. Si consideramos todas las rectas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que pasan por p vemos que todas cortan a S en p y en otro punto además de p, excepto la recta l de ecuación $y=1$, que, según lo que nos dice el cálculo elemental, es la *tangente* de S en p. Cuando completamos S y las rectas que pasan por p obtenemos una cónica proyectiva $\overline{S}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y el haz de rectas $\Omega(p)$ y vemos que, por la proposición 11.22, no existen puntos nuevos de corte las rectas del haz con $\overline{S}$. Vemos también que cuando pensamos en las rectas del haz aproximándose a $\overline{l}$, el punto de corte distinto de p de cada recta se va acercando cada vez más a p hasta convertirse en p cuando consideramos la recta $\overline{l}$. Esta es la forma en que en cálculo elemental se define intuitivamente la tangente a una curva en un punto. Por eso tiene sentido la siguiente definición, en la que llamaremos a la recta T_pC de la proposición 11.22, la recta tangente a C en un punto p:

Definición 11.24. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea p un punto del lugar de ceros de C. Decimos que la recta T_pC de la proposición 11.22 es la *recta tangente* a C en el punto p.

Si C es una cónica no degenerada de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y p es un punto del lugar de ceros de C, decimos que una recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es la *recta tangente* a C en p, si el completado proyectivo $\overline{l}$ de l es la recta tangente en el punto $i(p)$ al completado proyectivo $\overline{C}$ de C.

Proposición 11.25. *Dada una cónica C no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con matriz M, el conjunto de rectas tangentes a C forma el lugar de ceros de una cónica no degenerada en ${\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}}^*$. Dicha cónica tiene a M^{-1} como matriz asociada respecto de la referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

Demostración. Consideramos la recta l de ecuación $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$, que corresponde por tanto al punto de ${\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}}^*$ de coordenadas homogéneas $(u_0 : u_1 : u_2)$ respecto de la referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. De la proposición 11.22 se sigue que la recta l es tangente a C en un punto $p=(a_0:a_1:a_2)\in C$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M(C)^{-1}$$

(recuerda que, al ser C no degenerada, $M(C)$ es invertible). Por otra parte la condición de que p pertenezca a C se traduce en

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M(C) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0,$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M(C)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M(C)^{-1}M(C)M(C)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Damos ahora nombre a la cónica del dual que aparece en la proposición 11.25 y generalizamos la definición de recta tangente:

Definición 11.26. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con matriz asociada M, sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

(1) Llamamos *recta polar* de p respecto de C a la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(2) Llamamos *cónica dual* de C y la denotamos por C^* a la cónica de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ con matriz asociada M^{-1} respecto de la referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

(3) Llamamos *polo* de l respecto de C al punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que corresponde por dualidad a la recta polar (en $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$) de l respecto de C^*.

Vemos ahora algunas propiedades de la recta polar:

Proposición 11.27. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sean p y q puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

(1) *l es la recta polar de p si y solo si p es el polo de l.*

(2) *p está en la recta polar de q si y solo si q está en la recta polar de p.*

(3) *p está contenido en su recta polar si y solo si p pertenece al lugar de ceros de C.*

Demostración. Sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$, sea M una matriz asociada a C y sea

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

En ese caso

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

La recta l es la polar de p si y solo si

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$$

es ecuación l (es decir, si y solo si l corresponde al punto de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ de coordenadas $(u_0 : u_1 : u_2)$) y esto equivalente a que la recta $a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 = 0$ de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ sea la recta polar del punto de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ correspondiente a l. Esto prueba (1).

Sean ahora $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $q = (b_0 : b_1 : b_2)$. La recta polar de p tiene ecuación

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.27.1}$$

y la recta polar de q tiene ecuación

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Entonces p pertenece a la polar de q si y solo si

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.27.2}$$

y q pertenece a la polar de p si y solo si

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{11.27.3}$$

Como M es simétrica, (11.27.2) y (11.27.4) son equivalentes. Esto prueba (2).

Por último, $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ pertenece a su recta polar, que tiene ecuación (11.27.1) si y solo si

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{11.27.4}$$

y esto es equivalente a que p satisfaga la ecuación de C, es decir, a que pertenezca al lugar de ceros de C. □

Dada una cónica no degenerada C de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ podemos usar la proposición 11.27 y la cónica dual de C para hallar las rectas tangentes a C que por un punto dado de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Lo vemos en el ejemplo 4.7 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo.

Relación entre cónicas proyectivas y cónicas afines y euclídeas

Comenzamos el tema 3 diciendo que una de nuestras motivaciones para introducir el plano proyectivo era poder "completar" curvas del plano afín, como por ejemplo, una hipérbola. Dada una hipérbola, existen dos rectas, llamadas *asíntotas* que, a medida que vamos hacia el infinito, parece que van a cortarla. El plano proyectivo nos permite hacer rigurosa esta idea intuitiva. Lo vimos en los ejercicios 2b, 2c y 3 de la hoja de ejercicios de Geometría Proyectiva y lo vemos de nuevo en este ejemplo:

Ejemplo 11.28. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos la cónica C_2' del ejemplo 10.16, que tiene ecuación $2xy + 2x + 2y + 1 = 0$. El conjunto de ceros de C_2' es por tanto el conjunto $\{(x, y) \mid 2xy + 2x + 2y + 1 = 0\}$ y, con un abuso de notación, lo llamaremos también C_2'. Recordemos la inclusión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y). \end{array}$$

Entonces los puntos de $i(C_2')$ son aquellos puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que $x_0 \neq 0$ y

$$2\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} + 2\frac{x_1}{x_0} + 2\frac{x_2}{x_0} + 1 = 0.$$

Quitando denominadores en la ecuación anterior, vemos que los puntos de $i(C_2')$ son aquellos puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que $x_0 \neq 0$ y

$$2x_1x_2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_0^2 = 0.$$

Así, de forma natural, $i(C_2')$ está contenida en el conjunto de puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que

$$2x_1x_2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_0^2 = 0,$$

que es el lugar de ceros de la cónica proyectiva $\overline{C_2'}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $2x_1x_2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_0^2 = 0$. A $\overline{C_2'}$ la llamaremos el completado proyectivo de C_2'. Vemos que la intersección de $\overline{C_2'}$ con la recta del infinito $x_0 = 0$ son los puntos $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$. Recuerda que en el ejemplo 10.16 vimos que C_2' es una hipérbola. Una hipérbola tiene *ramas asintóticas* que se "escapan" hacia el infinito, aproximándose a las asíntotas de la hipérbola. Los puntos $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$, que llamaremos *puntos del infinito* de C_2' corresponden a esas ramas asintóticas; de hecho, son los puntos del infinito de las asíntotas de C_2'.

El ejemplo anterior inspira la siguiente definición:

Definición 11.29. Sea $F = a_{00} + a_{01}x + a_{02}y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x, y]$ y sea $C = [F]$ la cónica correspondiente de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. El *completado proyectivo* de C es la cónica proyectiva $\overline{C}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación

$$a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{11.29.1}$$

Los *puntos del infinito* de C o los puntos de C *en el infinito* son los puntos de intersección del lugar de ceros de $\overline{C}$ con la recta del infinito para la inclusión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y), \end{array}$$

es decir, con la recta de ecuación $x_0 = 0$.

Observación 11.30. Recuerda que $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica distinta de 2, que

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es una matriz asociada a C y que la ecuación de C se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Por otra parte, la ecuación (11.29.1) de $\overline{C}$ se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

por lo que $M(C)$ es también una matriz asociada a $\overline{C}$.

Vemos ahora cómo están relacionados los completados proyectivos de una cónica y de la imagen de esa cónica por un isomorfismo afín:

Proposición 11.31. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$.*

(1) *El completado proyectivo de $f(C)$ es la imagen de $\overline{C}$ por el completado proyectivo de f; es decir, $\overline{f(C)} = \overline{f}(\overline{C})$.*
(2) *La proyectividad $\overline{f}$ transforma los puntos del infinito de C en los puntos del infinito de $f(C)$.*

Demostración. En primer lugar, recordamos que, según el corolario 8.48 (2), la aplicación proyectiva $\overline{f}$ es en efecto una proyectividad. Según la proposición 8.45, la matriz del isomorfismo afín f con respecto a la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una matriz asociada al completado proyectivo $\overline{f}$ de f, respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Esto implica que el completado proyectivo de f^{-1} es la proyectividad inversa de $\overline{f}$ (es decir, $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$) y que la matriz N de f^{-1} respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una matriz asociada a $\overline{f}^{-1}$ respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Recuerda que, por la proposición 10.25, si $M(C)$ es una matriz asociada a C, entonces $N^tM(C)N$ es una matriz asociada a $f(C)$ y por la observación 11.30, una matriz asociada a $\overline{f(C)}$. Por otra parte, de nuevo según la observación 11.30, $M(C)$ es una matriz asociada a $\overline{C}$. Como N es una matriz asociada a $\overline{f}^{-1}$ respecto de la referencia proyectiva canónica, por la proposición 11.10, tenemos que $N^tM(C)N$ es una matriz asociada a $\overline{f}(\overline{C})$. Por tanto $\overline{f(C)}$ y $\overline{f}(\overline{C})$ son la misma cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Esto demuestra (1).

Para demostrar (2) recuerda que según el corolario 8.48 (1), la recta del infinito l_∞ es invariante por $\overline{f}$. Con un abuso de notación, llamamos $\overline{C}$ y $\overline{f(C)}$ a los lugares de ceros de las cónicas proyectivas $\overline{C}$ y $\overline{f(C)}$. Entonces

$$\overline{f}(\overline{C} \cap l_\infty) = \overline{f}(\overline{C}) \cap l_\infty = \overline{f(C)} \cap l_\infty.$$

□

La proposición 11.31 nos permite dar un criterio geométrico para decidir la clase de equivalencia afín de una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$:

Teorema 11.32. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y sea $\overline{C}$ su completado proyectivo. La clase de equivalencia afín de C viene determinada por la clase de equivalencia proyectiva de $\overline{C}$ (en ocasiones esta información por sí sola es suficiente para caracterizar la clase afín de C) y por los puntos en el infinito de C, según la tabla siguiente:*

Clase afín de C	Clase (proyectiva) de $\overline{C}$	Puntos de C en el infinito [(1)]
Elipse real	No degenerada real	$\emptyset$
Parábola	No degenerada real	Un único punto
Hipérbola	No degenerada real	Dos puntos
Elipse imaginaria	No degenerada imaginaria	$\emptyset$
Par de rectas reales paralelas	Par de rectas reales	Un único punto
Par de rectas reales secantes	Par de rectas reales	Dos puntos
Par de rectas imaginarias paralelas	Par de rectas imaginarias	Un único punto
Par de rectas imaginarias secantes	Par de rectas imaginarias	$\emptyset$
Recta doble	Recta doble	Un único punto

(1): *Los puntos en el infinito de C que aparecen en la tabla son puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, es decir, son puntos del infinito* reales. *En el caso de las elipses y los pares de rectas imaginarias paralelas, C sí tiene puntos del infinito en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, de hecho tiene un par de puntos* imaginarios conjugados *en el infinito. En el caso de las parábolas y de los pares de rectas paralelas, C tiene un único punto del infinito tanto en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ como en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, es decir, el único punto del infinito de C es necesariamente un punto* real.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C, que por la observación 11.30 también es una matriz asociada a $\overline{C}$. Recuerda que, según el teorema 10.34 la clase de equivalencia afín de C viene determinada por el rango de M, por $\Sigma(M)$, por el rango de $m(C)$ y por $\sigma(m(C))$. Por otra parte, según el teorema 11.21, la clase de equivalencia proyectiva de $\overline{C}$ viene determinada por el rango de M y por $\Sigma(M)$. Examinando detenidamente la lista de las clases de equivalencia afín de cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ dada en el teorema 10.29 y la lista de las clases de equivalencia proyectiva de cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ dada en el teorema 11.21, es fácil ver, si atendemos solo al rango de M, que

- C es una cónica no degenerada (es decir, C es una elipse (real o imaginaria), una parábola o una hipérbola) si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada (real o imaginaria);
- C es un par de rectas (reales o imaginarias, paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas (reales o imaginarias);
- C es una recta doble si y solo si $\overline{C}$ es un recta doble,

y, si nos fijamos también en $\Sigma(M)$, que

- C es una cónica no degenerada real (es decir, C es una elipse real, una parábola o una hipérbola) si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real;
- C es una elipse imaginaria si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada imaginaria;
- C es un par de rectas reales (paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas reales;
- C es un par de rectas imaginarias (paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas imaginarias ;
- C es una recta doble si y solo si $\overline{C}$ es un recta doble.

Distinguimos ahora las elipses reales, parábolas e hipérbolas. Si C es una elipse real, según el teorema 10.29, existe un isomorfismo afín f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en sí mismo tal que $f(C)$ tiene ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. En ese caso $\overline{f(C)}$ tiene ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ por lo $f(C)$ no tiene puntos reales en el infinito. Por la proposición 11.31 (2), C tampoco tiene puntos reales en el infinito. Razonando de manera anóloga, comprobamos que si C es una parábola, C tiene un único punto en el infinito y si C es una hipérbola, C tiene dos puntos en el infinito. Observa que esto implica también que si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real, C es una elipse real, una parábola o una hipérbola, según C no tenga puntos, tenga uno o tenga dos puntos en el infinito.

Una elipse imaginaria C ha quedado ya carecterizada por la propiedad de que $\overline{C}$ sea una cónica no degenerada imaginaria, por lo que no necesitaríamos recurrir a estudiar sus puntos en el infinito para decidir si C es una elipse imaginaria. En todo caso es cierto que C no tiene puntos reales en el infinito puesto que, según el teorema 11.21, una cónica no degenerada imaginaria no tiene puntos reales.

Distinguimos ahora los pares de rectas reales paralelas de los pares de rectas reales secantes. Si C es un par de rectas reales, su lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es la unión $l_1 \cup l_2$ de dos rectas distintas l_1 y l_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Es un sencillo ejercicio comprobar que el lugar de ceros de $\overline{C}$ es $\overline{l_1} \cup \overline{l_2}$, donde $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$ son los completados proyectivos de l_1 y l_2 respectivamente y que, al ser l_1 y l_2 rectas distintas, también lo son $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$. Sea p el punto de intersección de $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$. Entonces l_1 y l_2 serán rectas paralelas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ si y solo si tienen el mismo punto del infinito, es decir, si y solo si $p \in l_\infty$, es decir, si p es el único punto del infinito de C. Por otra parte, l_1 y l_2 serán rectas secantes de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ si y solo si tienen distintos puntos del infinito, es decir, si C tiene dos puntos en el infinito.

Para distinguir los pares de rectas imaginarias paralelas de los pares de rectas imaginarias secantes realizamos el mismo argumento que para los pares de rectas reales pero ahora trabajamos en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ y en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

Si C es una recta doble, C ha quedado ya caracterizada por la propiedad de que $\overline{C}$ sea una recta doble, por lo que no necesitaríamos recurrir a estudiar sus puntos en el infinito para decidir si C es una recta doble. En cualquier caso, como el lugar de ceros de C es una recta l (¿ves por qué?), el conjunto de puntos del infinito de C está formado únicamente por el punto del infinito de l.

Por último demostramos la observación (1) sobre los puntos del infinito de C. La intersección de $\overline{C}$ con l_∞ es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{array}{rrrcl} & & x_0 & = & 0 \\ a_{11}x_1^2 & +a_{12}x_1x_2 & +a_{22}x_2^2 & = & 0 \end{array} \tag{11.32.1}$$

con a_{11}, a_{12}, a_{22} números reales no todos simulténeamente nulos. Es un sencillo ejercicio comprobar que las soluciones de (11.32.1) en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ son

- dos puntos de coordenadas reales, si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} > 0$;
- un punto de coordenadas reales si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = 0$;
- dos puntos de coordenadas imaginarias conjungadas, si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$ (en este último caso, (11.32.1) no tiene soluciones en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$).

□

Observación 11.33. Comparamos los teoremas 10.34 y 11.32 fijándonos en el caso de las elipses reales. Dada una cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, según los teoremas 10.29 y 10.34, C es una elipse real si y solo si $R(C) = 3, \Sigma(C) = 1, r(C) = 2$ y $\sigma(C) = 2$. Por otra parte, según el teorema 11.32, C es una elipse real si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real y C no tiene puntos reales en el infinito. Observamos que el hecho de que $R(C) = 3$ y $\Sigma(C) = 1$ equivale, por el teorema 11.21, a que $\overline{C}$ sea una cónica no degenerada real. Por otra parte, $r(C)$ y $\sigma(C)$ son el rango de

$$m(C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y $\sigma(m(C)))$. Para estudiar los puntos del infinito de C, estudiamos las soluciones homogéneas $(x_1 : x_2)$ de la ecuación $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ (cf. (11.32.1)). Así pues, tanto para conocer $r(C)$ y $\sigma(C)$ como para ver cómo son los puntos del infinito de C estamos fijándonos en los coeficientes a_{11}, a_{12} y a_{12} de la ecuación de C (es decir, en los términos de grado 2 de la ecuación). La conclusión es que el teorema 10.34 interpretra la información contenida en $M(C)$ y en $m(C)$ de manera algebraica y el teorema 11.32 interpreta esa misma información de manera geométrica. Puedes comprobar que lo mismo pasa para las parábolas, hipérbolas, etc. En particular, los términos de grado 2 de la ecuación de C (sea cual sea la clase de equivalencia afín de C) nos dicen cómo son los puntos del infinito de C.

Observación 11.34. Comparando la clasificación afín y proyectiva de cónicas reales dada en los teoremas 10.29 y 11.21 vemos que hay más casos en la clasificación afín que en la proyectiva. El teorema 11.32 nos da una razón de por qué esto ocurre: hay cónicas no afínmente equivalentes, que al completarlas, dan lugar a cónicas proyectivamente equivalentes, como es el caso de las elipses realas, las parábolas y las hipérbolas, cuyos completados proyectivos son cónicas no degeneradas reales. Vemos por qué pasa esto. Consideramos las cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuaciones $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 - y = 0$ y $x^2 - y^2 - 1 = 0$ y sus correspodientes completados proyectivos, que son las cónicas D_1, D_2 y D_3 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, de ecuaciones $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ y $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$ respectivamente. Sabemos por el teorema 11.21 que D_1, D_2 y D_3 son cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ proyectivamente equivalentes, ya que las tres son cónicas no degeneradas reales. Eso quiere decir que existen proyectividades f y g de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que $f(D_1) = D_2$ y $g(D_1) = D_3$. Por ejemplo una proyectividad f

que cumple $f(D_1)=D_2$ es la que tiene ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_0' &=& x_0 \qquad +x_2 \\ x_1' &=& \qquad x_1 \\ x_2' &=& x_0 \qquad -x_2 \end{array}$$

con respecto a la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y una proyectividad g que cumple $g(D_1)=D_3$ es la que tiene ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_0' &=& \qquad x_1 \\ x_1' &=& x_0 \\ x_2' &=& \qquad\qquad x_2 \end{array}$$

con respecto a la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. La clave está en que ni f ni g dejan invariante la recta del infinito l_∞ de ecuación $x_0=0$ ($f(l_\infty)$ es la recta de ecuación $x_0+x_2=0$ y $g(l_\infty)$ es la recta de ecuación $x_1=0$), por lo que ni f ni g son, según el corolario 8.48 (1), el completado proyectivo de un isomorfismo afín (lógicamente, ya sabíamos que eso era imposible, ya que si f y g fueran los completados de isomorfismos afines, entonces las cónicas afines de ecuaciones $x^2+y^2-1=0$, $x^2-y=0$ y $x^2-y^2-1=0$ serían cónicas afínmente equivalentes de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, cosa que es falsa).

Otra forma de entender por qué hay menos clases de equivalencia proyectiva que de equivalencia afín es que, dada una cónica proyectiva D de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, según *elijamos la recta del infinito* (recuerda la observación 9.14) obtenemos distintas cónicas afines que pueden no ser afínmente equivalentes. Tomemos por ejemplo una cónica no degenerada real D y, haciendo un abuso de notación, llamemos también D a su lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. Elijamos una recta del infinito l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. En la observación 9.14 vimos que $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \smallsetminus l$ se puede identificar con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y que era posible sumergir $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ mediante una inclusión i'. Es un sencillo ejercicio comprobar que $D\smallsetminus l$ es el lugar de ceros de una cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y que D es el completado proyectivo de C *con respecto a* i'. Estudiemos ahora la intersección $D\cap l$. El corolario 11.23 nos dice que $D\cap l$ está formado por dos puntos, por un solo punto o es vacío. Según el teorema 11.32, en el primer caso C es una hipérbola, en el segundo caso, C es una parábola y, en el tercer caso, C es una elipse real. Para ver un ejemplo concreto de esto, resuelve el ejercicio (37) de la hoja de ejercicios de cónicas.

En la definición 11.24 introdujimos la recta tangente en un punto de una cónica no degenerada. A partir de esa definición, damos la de recta tangente a una cónica afín, que en la caso de $\mathbf{k}=\mathbf{R}$, coincide con la definición de recta tangente a una curva que has visto en Cálculo elemental:

Definición 11.35. Sea C un cónica no degenerada de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sea p un punto del lugar de ceros de C. Decimos que l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es la recta tangente a C en p si $\overline{l}$ es la recta tangente a $\overline{C}$ en p.

Definición 11.36. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Decimos que la recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una *asíntota* de C si $\overline{l}$ es la tangente a $\overline{C}$ en un punto del infinito de C.

Como consecuencia del teorema 11.32 vemos que si C es una parábola, C tiene un solo punto en el infinito por lo que la recta del infinito es tangente a $\overline{C}$ en dicho punto. Así pues, las parábolas no tienen asíntotas. De igual forma, del teorema 11.32 se deduce que las hipérbolas tienen dos asíntotas reales y las elipses, dos asínotas imaginarias.

Obtención del centro de una elipse o una hipérbola con métodos proyectivos.

Así como hemos definido las asíntotas (que son un concepto afín) usando Geometría Proyectiva (y las calcularemos también usando Geometría Proyectiva), la Geometría Proyectiva también nos puede servir para calcular un concepto afín como el centro y un concepto euclídeo como los ejes de una cónica no degenerada (de hecho, incluso los focos de una cónica se pueden calcular usando Geometría Proyectiva, como puedes ver en la definición de la página 51 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo). En la hoja de ejercicios de cónicas podrás calcular el centro y los ejes con geometría proyectiva. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 11.37. *Sea C una elipse real o una hipérbola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. El centro de C es el polo, respecto del completado proyectivo $\overline{C}$ de C, de la recta del infinito.*

Antes de demostrar la proposición, enunciamos y demostramos el siguiente lema que nos dice que las proyectividades conservan la polaridad:

Lema 11.38. *Sea D una cónica proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea g una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea p un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces, l es la polar de p respecto de D si y solo si la recta $g(l)$ es la polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$.*

Demostración. Sea N una matriz asociada a g^{-1} respecto de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea M una matriz asociada a la cónica D. Si $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ y

(11.38.1) $$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M,$$

entonces la polar de p tiene ecuación

(11.38.2) $$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0,$$

por lo que l es la polar de p respecto de D si y solo si l tiene por ecuación (11.38.2). Si llamamos $(a_0' : a_1' : a_2')$ a $g(p)$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Según la proposición 11.10, N^tMN es una matriz asociada de $g(D)$, por lo que la recta polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$ tiene ecuación

$$u_0'x_0 + u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0,$$

donde

(11.38.3)
$$\begin{pmatrix} u_0' & u_1' & u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0' & a_1' & a_2' \end{pmatrix} N^tMN = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} {N^{-1}}^t N^tMN = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} MN.$$

Un punto $(x_0 : x_1 : x_2) \in g(l)$ si y solo si $g^{-1}(x_0 : x_1 : x_2) \in l$, es decir, si y solo si

(11.38.4) $$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esto quiere decir que (11.38.4) es la ecuación de $g(l)$. Recuerda ahora que l es la recta polar de p si y solo si l tiene como ecuación (11.38.2). Por (11.38.1) y (11.38.3), esto equivale a que la ecuación de la polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$ es (11.38.4), es decir, es la ecuación de $g(l)$. □

Demostración de la proposición. Recuerda que el centro de C es por definición el punto medio del segmento delimitado por los focos de C. Consideremos primero una elipse real o una hipérbola C' como las de la lista del teorema 10.33, es decir, C' tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

con $a \geq b > 0$ si C' es una elipse real o

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

con $a, b > 0$ si C' es una hipérbola. Según los ejercicios 10.2 y 10.6, los focos de C' son los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si C' es una elipse real y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ si C' es una hipérbola. Por tanto, el centro de C' es el punto $(0, 0)$. Sea ahora C una elipse real o una hipérbola cualquiera. Existe una isometría f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $C = f(C')$ para alguna elipse real o hipérbola C' de la lista del teorema 10.33. Como f conserva las distancias, f transforma los focos de C' en los focos de C y el centro de C' en el centro de C, es decir, el centro de C es $f((0, 0))$, y lo llamaremos o.

Vemos ahora que el centro de C' es el polo de la recta del infinito respecto del completado proyectivo $\overline{C}'$ de C'. Eso es equivalente a ver que la recta del infinito es la recta polar, respecto de $\overline{C}'$, del centro de C'. Cuando sumergimos $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ por medio de

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x,y) & \mapsto & (1:x:y) \end{array}$$

el punto $(0, 0)$ se convierte en $i((0, 0)) = (1 : 0 : 0)$. Por otra parte, recuerda que $\overline{C}'$ tiene ecuación

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-x_0^2=0$$

si C' es una elipse real y

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-x_0^2=0$$

si C' es una hipérbola, por lo que una matriz asociada a $\overline{C}'$ será

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

si C' es una elipse real y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

si C' es una hipérbola. Por tanto, la recta polar de $(1 : 0 : 0)$ respecto de $\overline{C}$ es la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, la recta de ecuación $x_0 = 0$, que es la recta del infinito.

Usamos ahora el lema 11.38. Si la recta del infinito l_∞ es la polar de $(1 : 0 : 0)$ respecto de $\overline{C}'$, la recta $\overline{f}(l_\infty)$ es la polar de $\overline{f}(1 : 0 : 0)$ respecto de $\overline{f}(\overline{C}')$. Según la proposición 8.45, $\overline{f}(1 : 0 : 0) = i(f((0, 0)) = i(o)$. Según la proposición 11.31, $\overline{f}(\overline{C}')$ es el completado proyectivo de $f(C')$, es decir $\overline{f}(\overline{C}') = \overline{C}$, ya que $f(C') = C$. Finalmente, según el corolario 8.48, la recta del infinito queda invariante por $\overline{f}$, es decir, $\overline{f}(l_\infty) = l_\infty$. Es decir, la recta del infinito es la polar del centro de C (el punto o) respecto de $\overline{C}$ o, equivalentemente, o es el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$. □

Observación 11.39. La proposición anterior justifica que definamos el centro de una elipse imaginaria C como el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$. Observa que la matriz de $\overline{C}$ es una matriz de entradas reales y esto implica que el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$ es un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. De hecho, como l_∞ corta a $\overline{C}$ en dos puntos (no reales), l_∞ no es tangente a $\overline{C}$ y su polo no está en l_∞; es decir, el polo de l_∞ *es un punto de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.
Por otra parte, si C es una parábola, la recta del infinito l_∞ corta a $\overline{C}$ en un solo punto p. Por tanto, l_∞ es tangente a $\overline{C}$ en p o, lo que es lo mismo, p es el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$. Como $p \in l_\infty$, *p no es un punto de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y esto justifica que digamos que una parábola *no tiene centro*.

Hay otra razón que justifica que digamos que las elipses reales y las hipérbolas tienen centro mientras las parábolas no lo tienen: el centro de una elipse real o de una hipérbola es su *centro de simetría*; en cambio, una parábola no tiene ningún centro de simetría. Puedes ver más detalles de esto en el ejercicio 11.40. Asimismo, los ejes de una cónica también pueden definirse como *ejes de simetría*, es decir, como rectas l tales que la simetría axial con eje l deja a la cónica invariante.

Ejercicio 11.40. Sea C una cónica no degenerada real de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y llamemos también C a su lugar de ceros de C. Decimos que o es un *centro de simetría* de C si la simetría central f de centro o cumple $f(C) = C$.

(1) Demuestra que si C es una elipse real o una hipérbola, C tiene un único centro de simetría, que es el centro de C.
(2) Demuestra que si C es una parábola, C no tiene ningún centro de simetría.

Observación 11.41. Es posible que recuerdes que al principio de esta subsección mencionamos que el centro de una cónica no degenerada real es un *concepto afín*. Quizá esta afirmación te resulte extraña ya que, según la primera definición que hemos dado de centro, este es el punto medio del segmento limitado por los focos, que son un concepto métrico (observa que, sin embargo, el punto medio de un segmento *no* es un concepto métrico sino simplemente afín). A pesar de ello, de la proposición 11.37 se deduce que el centro de una cónica no es un concepto métrico, es decir, si o es el centro de C y f es un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que *no es necesariamente* una isometría, $f(o)$ es el centro de $f(C)$. Otra forma de justificar que el centro es un concepto puramente afín es percatarse de que, tal como dice el ejercicio 11.40, el centro es el centro de simetría y que una simetría central, aun siendo una isometría, puede definirse sin usar para nada la estructura euclídea de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, según se vio en el ejemplo 3.27 y en la observación 6.14.